Kangourou Sans Frontières

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy i Nauk Matematycznych

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny
KANGUR 2013

Student

S

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

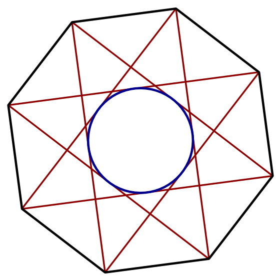
Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!

Pytania po 3 punkty

1. Która z następujących liczb jest największa?

A) 2013 B) 2^{0+13} C) 20^{13} D) 201^3 E) $20 \cdot 13$



2. Bok przedstawionego na rysunku obok ośmiokąta foremnego ma długość 10. Ile jest równy promień okręgu wpisanego w mały ośmiokąt wyznaczony przez przekątne dużego ośmiokąta, łączące co trzeci jego wierzchołek?

A) 10 B) 7,5 C) 5 D) 2,5 E) 2

3. Dany jest graniastosłup, który ma 2013 ścian (łącznie z podstawami). Ile krawędzi ma ten graniastosłup?

A) 2011 B) 2013 C) 4022 D) 4024 E) 6033

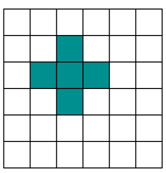
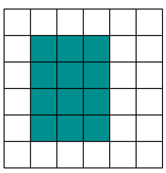
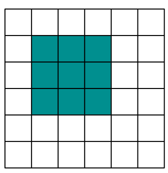
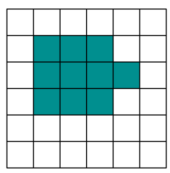
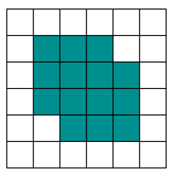
4. Pierwiastek trzeciego stopnia z liczby 3^{3^3} jest równy

A) 3^3. B) 3^{3^3-1}. C) 3^{2^3}. D) 3^{3^2}. E) $(\sqrt{3})^3$.

5. Rok 2013 zapisujemy za pomocą czterech kolejnych cyfr: $0, 1, 2, 3$. Ile lat upłynęło od ostatniego roku zapisywanego za pomocą czterech kolejnych cyfr?

A) 467 B) 527 C) 581 D) 693 E) 779

6. Dany jest kwadrat podzielony na 36 identycznych kwadracików oraz leżące na nim koło. Każdy mały kwadracik, który ma więcej niż jeden punkt wspólny z kołem, został zacieniowany. Który z następujących rysunków nie mógł powstać w ten sposób?

A)  B)  C)  D)  E) 

7. Niech $x \in \mathbb{R}$ spełnia warunek $2 < x < 3$. Ile z poniższych warunków spełnia x?

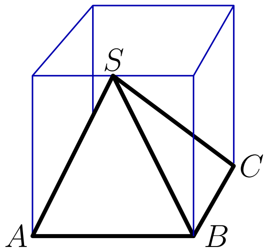
$$4 < x^2 < 9; \qquad 4 < 2x < 9; \qquad 6 < 3x < 9; \qquad 0 < x^2 - 2x < 3$$

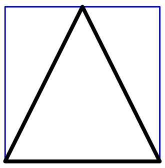
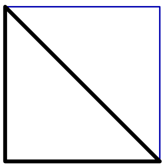
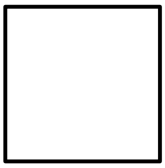
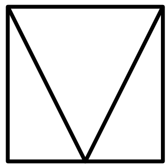
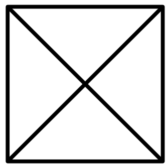
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. Sześciu herosów pojmało 20 łotrów. Pierwszy heros pojmał jednego łotra, drugi dwóch, a trzeci trzech. Czwarty heros pojmał więcej łotrów niż którykolwiek z pozostałych pięciu. Najmniejsza możliwa liczba łotrów pojmanych przez czwartego herosa jest równa

A) 7. B) 6. C) 5. D) 4. E) 3.

9. Rysunek obok przedstawia nieprzezroczystą piramidę $ABCDS$ o podstawie kwadratowej $ABCD$, której wierzchołek S leży w środku krawędzi szkieletu sześcianu. Patrzymy na piramidę z góry, z dołu, z tyłu, z przodu, z lewa i z prawa. Który z następujących rysunków nie przedstawia żadnego z tych widoków?



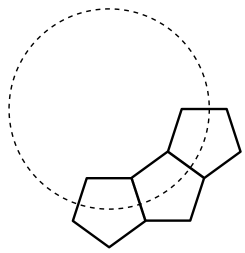
A)  B)  C)  D)  E) 

10. Pewna substancja, przechodząc ze stanu stałego w stan ciekły, zwiększa swoją objętość o $\frac{1}{12}$ swojej objętości początkowej. O jaką część maleje objętość tej substancji przy przechodzeniu ze stanu ciekłego w stan stały?

A) O $\frac{1}{10}$. B) O $\frac{1}{11}$. C) O $\frac{1}{12}$. D) O $\frac{1}{13}$. E) O $\frac{1}{14}$.

Pytania po 4 punkty

11. Remigiusz układa identyczne płytki w kształcie pięciokąta foremnego po obwodzie okręgu, stykając je krawędziami. Na razie ułożył trzy płytki – rysunek obok. Ilu płytek potrzeba, by pokryć w ten sposób cały okrąg?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

12. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją liniową o własności $f(2013) - f(2001) = 100$. Ile jest równe $f(2031) - f(2013)$?

A) 75 B) 100 C) 120 D) 150 E) 180

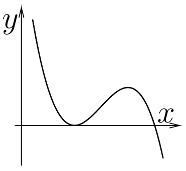
13. Dana jest funkcja f określona na zbiorze liczb całkowitych i o wartościach całkowitych. Gerwazy powiedział o tej funkcji: *Dla każdego parzystego x liczba $f(x)$ jest parzysta.* Protazy, słysząc to, wygłosił zaprzeczenie tego zdania. Co powiedział Protazy?

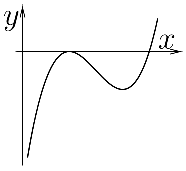
A) Dla każdego parzystego x liczba $f(x)$ jest nieparzysta.
B) Dla każdego nieparzystego x liczba $f(x)$ jest parzysta.
C) Dla każdego nieparzystego x liczba $f(x)$ jest nieparzysta.
D) Istnieje parzyste x, dla którego liczba $f(x)$ jest nieparzysta.
E) Istnieje nieparzyste x, dla którego liczba $f(x)$ jest nieparzysta.

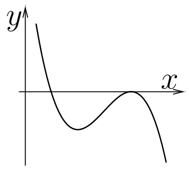
14. Ile dodatnich liczb całkowitych n ma tę własność, że zarówno $\frac{1}{3}n$ jak i $3n$ są trzycyfrowymi liczbami całkowitymi?

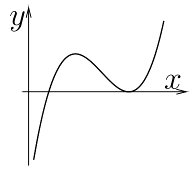
A) 12 B) 33 C) 34 D) 100 E) 300

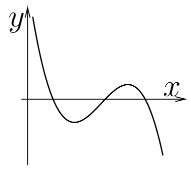
15. Dana jest funkcja $W(x) = (a-x)(b-x)^2$, gdzie $a < b$. Wykres tej funkcji jest przedstawiony na jednym z poniższych rysunków. Na którym?

A) 

B) 

C) 

D) 

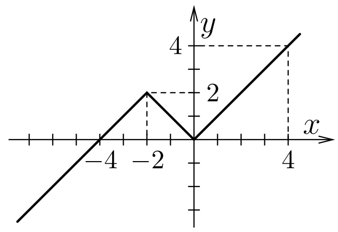
E) 

16. Rozważmy prostokąty, których jeden z boków ma długość 5 i które mają tę własność, że można je podzielić na prostokąt i kwadrat, przy czym któraś z tych figur ma pole równe 4. Ile nieprzystających prostokątów ma tę własność?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

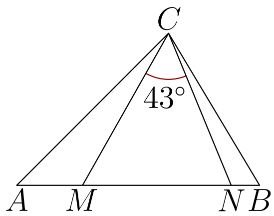
17. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ile rozwiązań ma równanie $f(f(f(x))) = 0$?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0



18. W trójkącie ABC wybrano na boku AB punkty M i N w taki sposób, że $|AN| = |AC|$ oraz $|BM| = |BC|$. Jaka jest miara kąta ACB, jeżeli $|\sphericalangle MCN| = 43^\circ$ (rysunek obok)?

A) 86° B) 89° C) 90° D) 92° E) 94°



19. Ile par dodatnich liczb całkowitych (x, y) spełnia równanie $x^3y^3 = 6^{12}$?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) Inna liczba.

20. Urna zawiera 900 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 100 do 999. Onufry wyjmuje losowo kilka kul i dla każdej z nich liczy sumę cyfr zamieszczonej na niej liczby. Jaka jest najmniejsza liczba kul, które Onufry powinien wyjąć, aby mieć pewność, że przynajmniej trzy z wyjętych kul dają tę samą sumę cyfr?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

Pytania po 5 punktów

21. Ile istnieje par liczb całkowitych (x, y), takich że $x \leqslant y$ oraz $xy = 5(x+y)$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

22. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek $f(x+5) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli $f(x) = x^2$ dla $x \in \langle -2; 3)$, to $f(2013)$ jest równe

A) 0. B) 1. C) 2. D) 4. E) 9.

23. Suma n początkowych dodatnich liczb całkowitych wyraża się liczbą trzycyfrową o równych cyfrach. Ile jest równa suma cyfr liczby n?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

24. Sześcian $ABCDEFGH$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez trzy wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkiem A (tj. połączone krawędzią z punktem A). W taki sam sposób, dla każdego z pozostałych siedmiu wierzchołków, przecięto sześcian płaszczyzną przechodzącą przez trzy sąsiadujące z nim wierzchołki. Odcięte części rozdzielono. Jaką bryłą jest część zawierająca środek sześcianu?

A) Czworościanem foremnym. B) Sześcianem. C) Ośmiościanem foremnym.
D) Dwunastościanem foremnym. E) Dwudziestościanem foremnym.

25. Ile rozwiązań (x, y), gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi, ma równanie $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

A) 1 B) 5 C) 8 D) 9 E) Nieskończenie wiele.

26. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych (począwszy od zera), będzie funkcją, taką że $f(2n) = f(2n+1) = n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego naturalnego $k > 0$ oznaczmy przez $f^k(n)$ liczbę $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, gdzie symbol f występuje k razy.

Ile rozwiązań ma równanie $f^{2013}(n) = 1$?

A) 0 B) 4026 C) 2^{2012} D) 2^{2013} E) Nieskończenie wiele.

27. Na płaszczyźnie danych jest k prostych, wśród nich proste a, b, c. Prosta a przecina dokładnie trzy, prosta b zaś przecina dokładnie cztery z tych prostych. Prosta c przecina dokładnie n prostych, przy czym $n \neq 3$ i $n \neq 4$. Ile jest równe k ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Inna liczba.

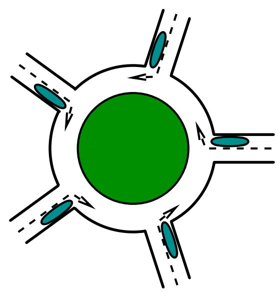
28. Na wyspach Bergamutach żyją dwa typy mieszkańców: prawdomówni – którzy zawsze mówią prawdę, i kłamcy – którzy zawsze kłamią. Po przybyciu na te wyspy spotkałem dwóch Bergamutan: wysokiego i niskiego. Zapytałem wysokiego, czy obaj są prawdomówni, ale z odpowiedzi nie mogłem wywnioskować, kim oni byli. Wówczas zapytałem niskiego, czy wysoki jest prawdomównym, a gdy odpowiedział, wiedziałem już, do jakiego typu należał każdy z nich. Kim byli napotkani Bergamutanie?

A) Obaj byli prawdomówni.
B) Obaj byli kłamcami.
C) Wysoki był prawdomówny, niski kłamcą.
D) Wysoki był kłamcą, niski prawdomównym.
E) Nie można tego rozstrzygnąć.

29. Ciąg (a_n) zadany jest następująco: $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$. Ile jest równe a_{100} ?

A) 100 B) 1000 C) 2012 D) 4950 E) 5050

30. Na przedstawione na rysunku obok rondo wjeżdża jednocześnie 5 aut, każde z innej drogi. Żadne z aut nie objeżdża całego ronda i każde z nich zjeżdża innym zjazdem. Ile jest wszystkich możliwości opuszczenia ronda przez te auta?



A) 24 B) 44 C) 60 D) 81 E) 120