Kangourou Sans Frontières

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy
i Nauk Matematycznych

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny

KANGUR 2012

Student

S

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!

Pytania po 3 punkty

1. Iloma zerami kończy się liczba $2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15} \cdot 7^{17}$?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 27 E) Ani jednym.

2. Liczba $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ jest równa

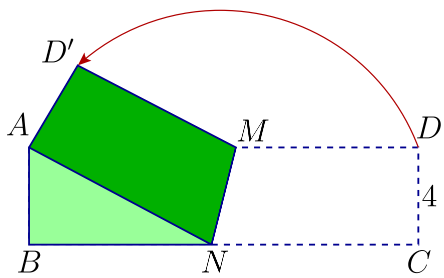
A) 1. B) $\sqrt{2}$. C) $\sqrt[6]{4}$. D) $\sqrt[3]{4}$. E) 2.

3. W pewnym trójkącie prostokątnym największy kąt jest 3 razy większy od kąta najmniejszego. Ile stopni ma najmniejszy kąt w tym trójkącie?

A) 22,5 B) 30 C) 45 D) 60 E) 90

4. Prostokątny kawałek papieru $ABCD$ o wymiarach 4cm×16cm został zagięty, tak że wierzchołek C pokrył się z wierzchołkiem A (rysunek obok). Jakie pole ma czworokąt $ANMD'$?

A) 28 cm^2 B) 30 cm^2 C) 32 cm^2 D) 36 cm^2 E) 48 cm^2



5. Suma cyfr pewnej liczby 9-cyfrowej jest równa 8. Ile jest równy iloczyn cyfr tej liczby?

A) 0 B) 1 C) 8 D) 9 E) 9!

6. Największą liczbą naturalną n spełniającą nierówność $n^{200} < 5^{300}$ jest

A) 5. B) 6. C) 8. D) 11. E) 12.

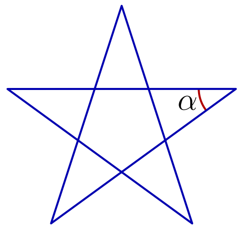
7. Dla której z następujących funkcji prawdziwa jest tożsamość: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$?

A) $f(x) = \frac{2}{x}$ B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ D) $f(x) = \frac{1}{x}$ E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

8. Liczba rzeczywista x spełnia nierówności $x^3 < 64 < x^2$. Które z następujących zdań jest prawdziwe?

A) $0 < x < 64$ B) $-8 < x < 4$ C) $x > 8$ D) $-4 < x < 8$ E) $x < -8$

9. Rysunek obok przedstawia 5-ramienną gwiazdę pitagorejską (wierzchołki pięciu ramion tej gwiazdy wyznaczają pięciokąt foremny). Jaka jest miara kąta α ?



A) 24° B) 30° C) 36° D) 45° E) 72°

10. Mój wiek wyraża się liczbą dwucyfrową, która jest potęgą o wykładniku naturalnym liczby 5. Wiek mojego kuzyna wyraża się liczbą dwucyfrową, która jest potęgą o wykładniku naturalnym liczby 2. Łączna suma cyfr dwóch liczb wyrażających mój wiek i wiek mojego kuzyna jest nieparzysta. Ile jest równy iloczyn wszystkich cyfr obu tych liczb?

A) 240 B) 2010 C) 60 D) 50 E) 300

Pytania po 4 punkty

11. Pierwszą z pięciu danych liczb jest 2, a ostatnią 12 (rysunek obok). Iloczyn trzech pierwszych liczb jest równy 30, iloczyn trzech środkowych liczb jest równy 90, a iloczyn ostatnich trzech liczb jest równy 360. Środkową liczbą jest

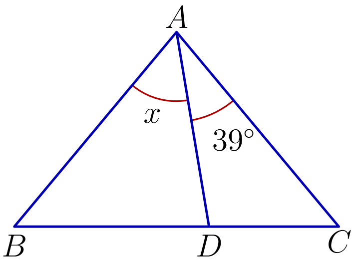
2				12

A) 3. B) 4. C) 5. D) 6. E) 10.

12. Biuro podróży zaproponowało grupie turystów zwiedzających Warmię i Mazury cztery opcjonalne oferty dodatkowych atrakcji. Z każdej z tych ofert skorzystało 80% członków grupy. Z wszystkich czterech ofert skorzystało p procent członków grupy. Najmniejszą wartością p, przy której jest to możliwe, jest

A) 80. B) 60. C) 40. D) 20. E) 16.

13. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AB| = |AC|$, wybrano punkt D, tak że $|AD| = |BD|$ (rysunek obok). Jeżeli kąt DAC ma miarę 39°, to kąt BAD ma miarę

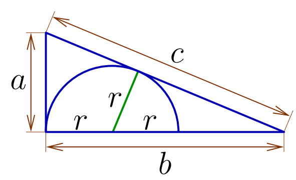


A) 43°. B) 45°. C) 47°. D) 49°. E) 51°.

14. W szkołach na Słowacji stosuje się pięciostopniową skalę ocen: od 1 (ocena najwyższa) do 5. W jednej ze szkół uczniowie pewnej klasy uzyskali z testu z matematyki średnią ocen równą 4, przy czym chłopcy uzyskali średnią ocen 3,6, a dziewczęta 4,2. Które z następujących zdań jest prawdziwe?

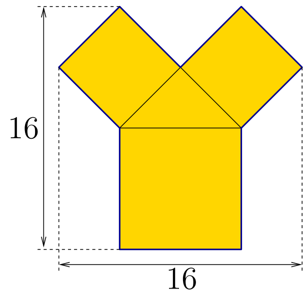
A) W klasie tej jest dwukrotnie więcej chłopców niż dziewcząt.
B) W klasie tej jest czterokrotnie więcej chłopców niż dziewcząt.
C) W klasie tej jest dwukrotnie więcej dziewcząt niż chłopców.
D) W klasie tej jest czterokrotnie więcej dziewcząt niż chłopców.
E) W klasie tej liczba dziewcząt jest równa liczbie chłopców.

15. Rysunek obok przedstawia trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b i przeciwprostokątnej długości c oraz półkole o promieniu r wpisane w ten trójkąt. Jaki jest promień tego półkola?



A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ B) $\frac{ab}{a+b+c}$ C) $\frac{ab}{b+c}$ D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ E) $\frac{ab}{a+c}$

16. Rysunek obok przedstawia trójkąt prostokątny równoramienny z dobudowanymi na bokach kwadratami. Jakie jest łączne pole figury utworzonej przez ten trójkąt i trzy kwadraty?



A) 114 B) 130 C) 144 D) 160 E) 186

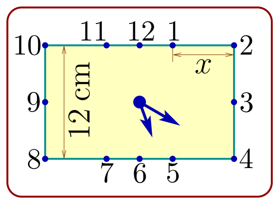
17. Ciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{50})$ ma tę własność, że spośród wszystkich $\frac{49\cdot 50}{2}$ iloczynów dwóch wyrazów tego ciągu dokładnie 522 są ujemne. Ile wyrazów tego ciągu jest równych zero?

A) 1 B) 3 C) 7 D) 11 E) Nie można tego wyliczyć.

18. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Niech E i F będą odpowiednio środkami boków AB i AD. Niech ponadto G będzie punktem odcinka CF, takim że $3|CG| = 2|GF|$. Pole trójkąta BEG jest równe

A) $\frac{7}{10}$. B) $\frac{4}{5}$. C) $\frac{8}{5}$. D) $\frac{3}{5}$. E) $\frac{6}{5}$.

19. Tarcza zegara przedstawionego na rysunku obok ma kształt prostokąta. Jaka jest odległość x między punktami oznaczającymi godziny 1 i 2, jeżeli odległość między punktami oznaczającymi godziny 8 i 10 jest równa 12 cm?



A) $3\sqrt{3}$ cm B) $2\sqrt{3}$ cm C) $4\sqrt{3}$ cm D) $(2+\sqrt{3})$ cm E) $(12-3\sqrt{3})$ cm

20. Prawidłowe kostki do gry (tzn. takie że suma oczek na każdych dwóch przeciwległych ścianach jest równa 7) układamy w rzędzie, stykając ze sobą ściany o równej liczbie oczek (rysunek obok). Ilu kostek powinniśmy użyć, aby suma oczek na wszystkich ścianach powstałego w ten sposób prostopadłościanu była równa 2012?

A) 70 B) 71 C) 142 D) 144 E) Nie jest to możliwe.

Pytania po 5 punktów

21. Jaka jest najmniejsza możliwa miara kąta w trójkącie równoramiennym, który ma tę własność, że pewna jego środkowa dzieli go na dwa trójkąty równoramienne?

A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 36° E) 45°

22. Dla liczby rzeczywistej x oznaczmy przez $[x]$ największą liczbę całkowitą n, taką że $n \leqslant x$. Niech $\{x\} = x - [x]$.

Jeżeli x jest taką liczbą, że $\{x\} \cdot [x] = 100$, to ile jest równe $[x^2] - [x]^2$?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) Nie można tego jednoznacznie określić.

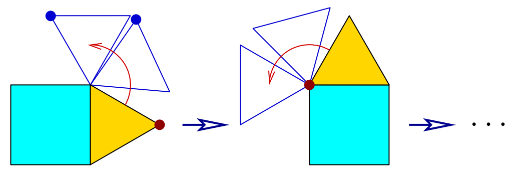
23. Automat umie wykonywać tylko następujące dwie operacje na ułamkach:

- dodawać 8 do licznika;
- dodawać 7 do mianownika.

Rozpoczynając od ułamka $\frac{7}{8}$ automat ten wykonał łącznie n operacji w pewnej kolejności i w rezultacie otrzymał ułamek o wartości $\frac{7}{8}$. Jaka jest najmniejsza możliwa dodatnia wartość n?

A) 56 B) 81 C) 109 D) 113 E) Jest to niemożliwe.

24. Trójkąt równoboczny o boku 1 toczy się po obwodzie kwadratu o boku 1 (rysunek obok). Jaka będzie długość linii, którą zakreśli zaznaczony wierzchołek trójkąta do momentu powrotu trójkąta i tego wierzchołka do pozycji początkowej?



A) 4π B) $\frac{28}{3}\pi$ C) 8π D) $\frac{14}{3}\pi$ E) $\frac{21}{2}\pi$

25. Na ile sposobów można ustawić liczby 1, 2, 3, 4 w takiej kolejności (x_1, x_2, x_3, x_4), aby liczba $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ była podzielna przez 3?

A) 8 B) 12 C) 14 D) 16 E) 24

26. Dana jest parabola $y = x^2$ oraz 2012 linii prostych równoległych do prostej $y = x$, z których każda przecina parabolę w dwóch punktach. Rzutujemy prostopadle te punkty na oś Ox otrzymując 4024 liczby. Ile jest równa suma tych liczb?

A) 0 B) 1 C) 1006 D) 2012
E) Nie można jednoznacznie wyznaczyć tej sumy.

27. Każda z pięciu lamp układu jest w jednym z dwóch stanów: albo „świeci”, albo „nie świeci”. Każdorazowe naciśnięcie włącznika dowolnej lampy zmienia stan tej lampy i jeszcze jednej losowo wybranej lampy spośród pozostałych (nie musi to być za każdym razem ta sama lampa). Na początku wszystkie lampy były w stanie „nie świeci”. Włączniki tego układu lamp naciśnięto dokładnie 10 razy. Wówczas na pewno:

A) Co najmniej jedna lampa świeci. B) Wszystkie lampy świecą.
C) Co najmniej jedna lampa nie świeci. D) Żadna lampa nie świeci.
E) 3 lampy świecą, a 2 nie świecą.

28. Definiujemy ciąg (a_n) w sposób następujący: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_1 - a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, itd. Ogólnie: $a_{2k+1} = a_{2k-1} - a_{2k}$, $a_{2k+2} = a_{2k} + a_{2k+1}$, $k \geqslant 1$. Ile jest równa suma pierwszych 100 wyrazów tego ciągu?

A) 0 B) 3 C) -21 D) 100 E) -1

29. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 25, 26\}$ kolejnych liczb naturalnych wybieramy dwie liczby a i b w taki sposób, że iloczyn ab jest równy sumie pozostałych elementów tego zbioru. Ile jest równe $|a - b|$?

A) 10 B) 9 C) 7 D) 2 E) 6

30. Każdy kot w Krainie Czarów jest albo mądry, albo szalony. Jeśli mądry kot znajdzie się w jednym pomieszczeniu z trzema kotami szalonymi, natychmiast staje się szalony. Jeżeli szalony kot znajdzie się w jednym pomieszczeniu z trzema kotami mądrymi, natychmiast zostaje rozpoznany.

Trzy koty weszły kolejno do pustego pokoju. Wkrótce po nich do pokoju wszedł czwarty kot, wtedy pierwszy kot wyszedł. Gdy do pokoju wszedł piąty kot, kot drugi wyszedł, itd. Gdy wreszcie do pokoju wszedł 2012. kot, wówczas po raz pierwszy zdarzyło się, że jeden z kotów został rozpoznany jako szalony. Które dwa koty mogły być szalone po wejściu do pokoju?

A) 1. i 2011. B) 2. i 2010. C) 3. i 2009. D) 4. i 2012. E) 2. i 2011.
